

Name _____ Student ID _____

Prince of Songkla University
Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering

Final Examination: Semester 2

Date: 6 May 2016

Subject: 225-242, 227-252 Engineering Statistics II

Academic Year: 2015

Time: 13:30-16:30

Room: หัวหุ่น

ทฤษฎีในการสอบ โทษขั้นต่ำ คือ ปรับตกในรายวิชาที่ทฤษฎี และพักการเรียนหนึ่งภาคการศึกษา

Instructions: Read carefully

1. Only 2 papers (size A4) with handwriting are allowed.
2. There are 6 problems, do all of them. Also show your work clearly and legibly.
3. Answer your questions in this test paper, only.
4. You must write your name and your student ID in every page of the test.
5. Total score is 100 points.

Distribution of Score

Problem	Points	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
1	10	1	1	2	5	1
2	15	1	2	5	7	-
3	20	10	10	-	-	-
4	15	-	-	-	-	-
5	20	5	15	-	-	-
6	20	-	-	-	-	-

Tests are prepared by
Nikorn Sirivongpaisal

Problem 1: (10 points) จงตอบคำถามต่อไปนี้

(a) (1 points) หลักการสำคัญ 3 ประการในการออกแบบการทดลองทางวิศวกรรมได้แก่อะไร

(b) (1 points) วัตถุประสงค์ของการ Blocking คืออะไร

(c) (2 points) จากตาราง ANOVA ให้อธิบายความหมายของ Sum of Square และ Mean Square

(d) (5 points) จากตาราง ANOVA ด้านล่างนี้ ให้เติมค่า P -Value ในตารางให้สมบูรณ์

Source of variations	SS	df	MS	F	P -Value
A	7,160	1			
B	945,342	2			
AB	818	2			
Error	5,371	12			

(e) (1 points) จากข้อ (d) ให้เขียนสมการคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) ของการทดลอง

Problem 2: (15 points) การทดลองทางวิศวกรรมอย่างหนึ่งซึ่งเกี่ยวกับคุณสมบัติการนำไฟฟ้าของสารที่ใช้เคลือบหลอดคาโทด ได้ข้อมูลจากการทดลองดังตารางต่อไปนี้

ชนิดของสารเคลือบ	คุณสมบัติการนำไฟฟ้า			
	1	143	141	150
2	152	149	137	143
3	144	143	142	137
4	159	157	162	

จงตอบคำถามต่อไปนี้

(a) (1 points) จงระบุสมมติฐานทางสถิติที่เป็นภาษาพูดจากการทดลองข้างต้นให้ถูกต้อง _____

(b) (2 points) จงระบุสมมติฐานทางสถิติที่เป็นภาษาคณิตศาสตร์ (โดยใช้ Treatment Model) จากการทดลองข้างต้นให้ถูกต้อง _____

(c) (5 points) จากข้อมูลการทดลองข้างต้น ให้เติมตาราง ANOVA ด้านล่างนี้ ให้สมบูรณ์ (ให้แสดงวิธีการพิจารณาอย่างละเอียด ถ้าเติมมาเพียงคำตอบ จะไม่มีคะแนนให้)

Source of variations	<i>SS</i>	<i>df</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>

Name _____ Student ID _____

- (d) (7 points) ให้ใช้ Fisher's Least Significance Difference พิจารณาว่าคุณสมบัติการนำไฟฟ้าจากชนิดของสารเคลือบใดที่แตกต่างจากกลุ่มชนิดของสารเคลือบที่ใช้ในการทดลองนี้ (ให้แสดงวิธีการพิจารณาอย่างละเอียด)

Problem 3: (20 points) จงตอบคำถามต่อไปนี้

- (a) (10 points) ตาราง ANOVA ที่ให้ไว้ข้างล่างนี้ได้จากการทดลองทางวิศวกรรมอย่างหนึ่ง โดยมีตัวแบบทางคณิตศาสตร์ คือ $y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$ เมื่อ $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$

ANOVA Table

Source	SS	df	MS
τ_i	0.0014000		
β_j	0.0212250		
$\tau\beta_{ij}$			
Error			
Total	0.0240250		

จงเติมตาราง ANOVA ข้างต้นให้ถูกต้องและสมบูรณ์ตามตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่กำหนดมา และกำหนดสมมติฐานทางสถิติที่เหมาะสม และทำการทดสอบสมมติฐานดังกล่าวว่ามีอิทธิพลจากแหล่งความผันแปรต่างๆ หรือไม่ กำหนดให้ $\alpha = 0.05$. (ไม่ต้องดำเนินการทวนสอบคุณภาพของข้อมูล) (ต้องแสดงการได้มาของคำตอบอย่างละเอียด ถ้าเติมมาเพียงคำตอบ จะไม่มีคะแนนให้)

- (b) (10 points) ในการออกแบบการทดลองหนึ่ง น.ศ.ได้ทำการกำหนดสมมติฐานดังนี้ $H_0 : \tau_i = 0; i = 1, 2, \dots, 6$ และ $H_0 : \tau_i \neq 0; i = 1, 2, \dots, 6$ โดยน.ศ.ผู้นี้ต้องการหาจำนวนทำซ้ำในการทดลอง สมมติว่าในความเป็นจริงค่า $\tau_1 = 0, \tau_2 = 0, \tau_3 = 2, \tau_4 = 0, \tau_5 = 2, \tau_6 = 0$ และทราบจากการทดลองในอดีตที่ว่าค่า $MS_E = 4$ จากข้อมูลทั้งหมดให้ช่วยน.ศ.ผู้นี้ในการหาจำนวนทำซ้ำในการทดลอง โดยกำหนดให้ Power of the test เท่ากับ 0.90

Problem 4: (15 points) จากตาราง ANOVA ที่ให้ไว้ด้านล่าง จงระบุสมการคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) ของการทดลองและเติมตารางให้สมบูรณ์ และกำหนดสมมติฐานที่เหมาะสม พร้อมทั้งทดสอบสมมติฐานที่ตั้งขึ้น กำหนดให้ใช้ $\alpha = 0.05$. (ไม่ต้องดำเนินการทวนสอบคุณภาพของข้อมูล) (ต้องแสดงการได้มาของคำตอบอย่างละเอียด ถ้าเติมมาเพียงคำตอบ จะไม่มีคะแนนให้)

ANOVA Table				
Source of Variation	SS	df	MS	F
A		2		7.55
B		1		
C		2		19.71
AB	3.204			
AC	6.513			
BC	1.051			
ABC			0.5211	0.94
Error		18		
Total	70.420			

สมการคณิตศาสตร์ของการทดลองนี้ คือ

ค่า R^2 ของการทดลองนี้ คือ

Problem 5: (20 points) วิศวกรผู้หนึ่งกำลังสงสัยว่าพื้นผิวของชิ้นงานโลหะชนิดหนึ่งเป็นผลมาจากชนิดของสีที่ใช้ทาและเวลาที่ใช้อบชิ้นงาน เขาตัดสินใจทำการทดลองโดยเลือกใช้ชนิดของสี 2 ชนิด และเวลาอบแห้ง 3 ค่า คือ 20, 25, และ 30 นาที โดยเขาทดลองชิ้นงานจำนวน 3 ชิ้นในแต่ละเงื่อนไขของการทดลอง ผลการทดลองแสดงในตารางด้านล่างต่อไปนี้

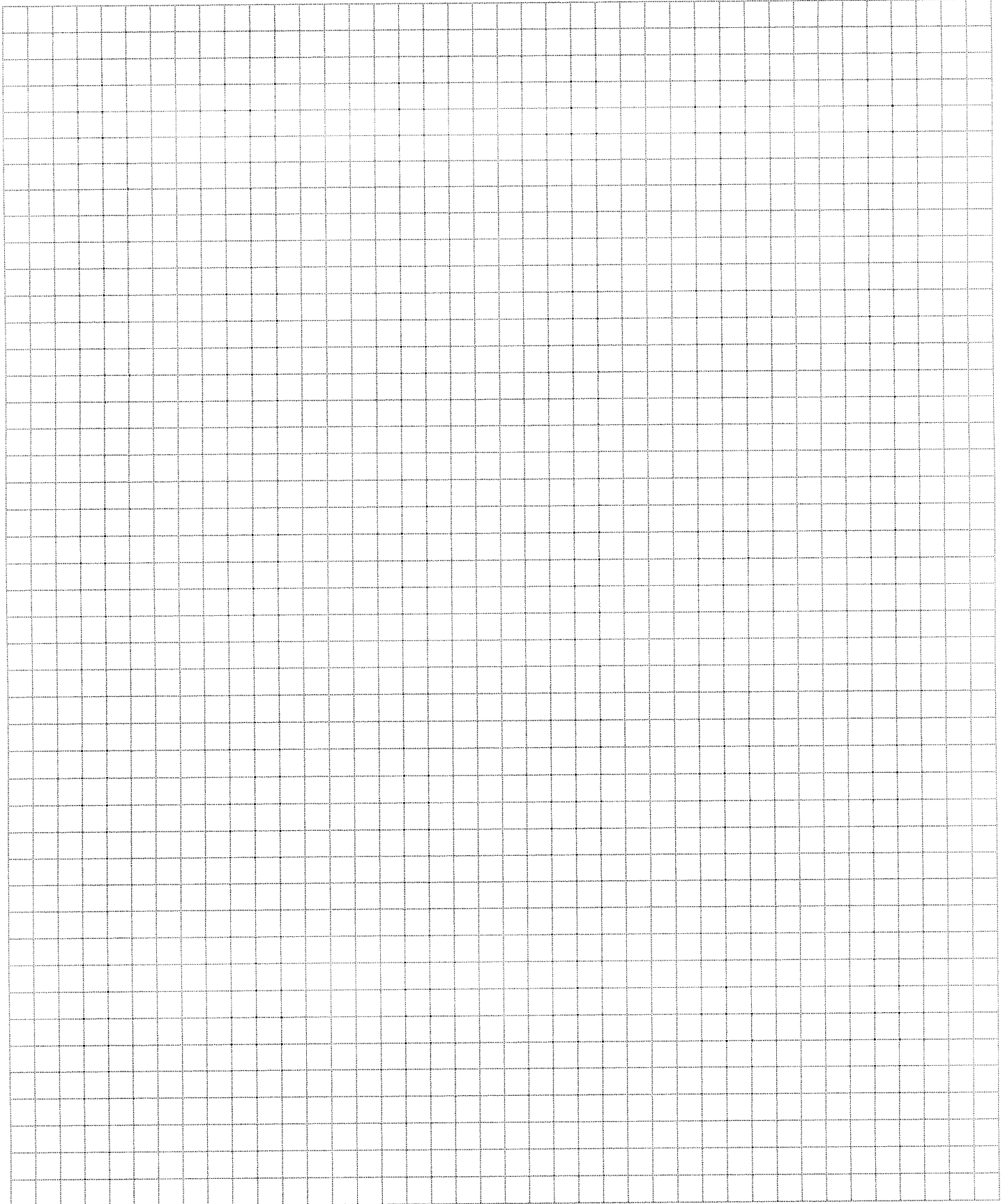
ชนิดของสี	เวลาอบแห้ง		
	20	25	30
1	74	73	78
	64	61	85
	50	44	92
2	92	98	66
	86	73	45
	68	88	85

จงตอบคำถามต่อไปนี้

(a) **(5 points)** ค่าที่ควรจะเป็นของพื้นผิวงานโลหะนี้ภายใต้เงื่อนไขต่างๆ ดังคำถามในตารางด้านล่างนี้ (ต้องแสดงการได้มาของคำตอบอย่างละเอียด ถ้าเติมมาเพียงคำตอบ จะไม่มีคะแนนให้)

เงื่อนไข	ค่าที่ควรจะเป็น
สีชนิดที่ 1 และ เวลาอบแห้งที่ 25 นาที	
สีชนิดที่ 1	
สีชนิดที่ 2 และ เวลาอบแห้งที่ 30 นาที	
สีชนิดที่ 2	
เวลาอบแห้งที่ 20 นาที	

(b) (15 points) จงเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ผิวของชิ้นงานกับชนิดของสีที่ใช้ทา และกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ผิวของชิ้นงานกับเวลาอบแห้ง รวมทั้งกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ผิวของชิ้นงานกับชนิดของสีที่ใช้ทาและเวลาอบแห้ง (ต้องระบุค่าตัวเลขบนกราฟอย่างชัดเจน)



21

Problem 6: (20 points) ข้อมูลจากการทดลอง 2^3 Factorial Design และผลจากการวิเคราะห์การทดลองในตารางที่ 1 และตารางที่ 2 ต่อไปนี้ แต่เนื่องจากมีข้อผิดพลาดในการบันทึกข้อมูลทำให้มีข้อมูลบางส่วนหายไปจากทั้งสองตาราง (ในตารางจะแสดงเป็นค่า *missing*) จงใช้ข้อมูลที่เหลืออยู่ในตารางหาค่าของข้อมูลที่ *missing* และเติมคำตอบที่หาได้ลงในช่องข้อมูลที่ *missing* เหล่านั้น และเมื่อหาค่า *missing* ได้แล้ว ให้สร้างสมการ Regression Model จากการทดลองนี้ กำหนดให้ใช้ $\alpha = 0.05$. (ต้องแสดงการได้มาของคำตอบอย่างละเอียด ถ้าเติมมาเพียงคำตอบ จะไม่มีคะแนนให้)

ตารางที่ 1 ข้อมูลจากการทดลอง

Treatment Combination	Replicate	
	I	II
(1)	<i>missing</i> =	93
<i>a</i>	74	<i>missing</i> =
<i>b</i>	81	<i>missing</i> =
<i>ab</i>	<i>missing</i> =	80
<i>c</i>	77	<i>missing</i> =
<i>ac</i>	<i>missing</i> =	80
<i>bc</i>	<i>missing</i> =	82
<i>abc</i>	73	<i>missing</i> =

ตารางที่ 2 ผลการวิเคราะห์จากการทดลอง

Source of Variation	SS	F
A	<i>missing</i> =	31.19
B	<i>missing</i> =	0.84
C	<i>missing</i> =	12.63
AB	<i>missing</i> =	0.26
AC	<i>missing</i> =	1.74
BC	<i>missing</i> =	0.09
ABC	<i>missing</i> =	38.36
Error	48.5	
Total	564.438	

Name _____ Student ID _____

Handwritten mark

II Percentage Points of the t Distribution^a

ν \ α	0.40	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
1	0.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.32	318.31	636.62
2	0.289	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	23.326	31.821
3	0.277	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.213	12.706
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.609
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.965
6	0.265	0.727	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.841
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.019	4.785	5.208
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	4.785
9	0.261	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.501
10	0.260	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.297
11	0.260	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.144
12	0.259	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.025
13	0.259	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	3.930
14	0.258	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	3.852
15	0.258	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	3.787
16	0.258	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	3.733
17	0.257	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.686
18	0.257	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.646
19	0.257	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.610
20	0.257	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.579
21	0.257	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.552
22	0.256	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.527
23	0.256	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.505
24	0.256	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.485
25	0.256	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.467
26	0.256	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.450
27	0.256	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.435
28	0.256	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.421
29	0.256	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.408
30	0.256	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.396
40	0.255	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.385
60	0.254	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.307
120	0.254	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160	3.232
∞	0.253	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.160

^a ν = Degrees of freedom.^aAdapted with permission from *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 1, 3rd edition, by E. S. Pearson and H. O. Hartley, Cambridge University Press, Cambridge, 1966.

IV Percentage Points of the F Distribution^a

$F_{0.25, \nu_1, \nu_2}$

ν_2	Degrees of Freedom for the Numerator (ν_1)																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	5.83	7.50	8.20	8.58	8.82	8.98	9.10	9.19	9.26	9.32	9.41	9.49	9.58	9.63	9.67	9.71	9.76	9.80	9.85
2	2.57	3.00	3.15	3.23	3.28	3.31	3.34	3.35	3.37	3.38	3.39	3.41	3.43	3.43	3.44	3.45	3.46	3.47	3.48
3	2.02	2.28	2.36	2.39	2.41	2.42	2.43	2.44	2.44	2.44	2.45	2.46	2.46	2.46	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47
4	1.81	2.00	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08
5	1.69	1.85	1.88	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.88	1.88	1.88	1.88	1.87	1.87	1.87
6	1.62	1.76	1.78	1.79	1.79	1.78	1.78	1.78	1.77	1.77	1.77	1.76	1.76	1.75	1.75	1.75	1.74	1.74	1.74
7	1.57	1.70	1.72	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.70	1.69	1.68	1.68	1.67	1.67	1.66	1.66	1.65	1.65	1.65
8	1.54	1.66	1.67	1.66	1.66	1.65	1.64	1.64	1.63	1.63	1.62	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.58	1.58	1.58
9	1.51	1.62	1.63	1.63	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.56	1.55	1.54	1.54	1.53	1.53
10	1.49	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.52	1.51	1.51	1.50	1.49	1.48
11	1.47	1.58	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.49	1.48	1.47	1.47	1.46	1.45
12	1.46	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.45	1.44	1.43	1.42
13	1.45	1.55	1.55	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.42	1.41	1.40
14	1.44	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.41	1.41	1.40	1.39	1.38
15	1.43	1.52	1.52	1.51	1.49	1.48	1.47	1.46	1.46	1.45	1.44	1.43	1.41	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36
16	1.42	1.51	1.51	1.50	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.44	1.43	1.41	1.41	1.40	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36
17	1.42	1.51	1.50	1.49	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.43	1.41	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34
18	1.41	1.50	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.42	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32
19	1.41	1.49	1.49	1.47	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.41	1.40	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32	1.30
20	1.40	1.49	1.48	1.47	1.45	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.29
21	1.40	1.48	1.48	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.28
22	1.40	1.48	1.47	1.45	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.39	1.37	1.36	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28
23	1.39	1.47	1.47	1.45	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.28	1.27
24	1.39	1.47	1.46	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.38	1.36	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28	1.26
25	1.39	1.47	1.46	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.34	1.33	1.32	1.31	1.29	1.28	1.27	1.25
26	1.38	1.46	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.37	1.35	1.34	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28	1.26	1.25
27	1.38	1.46	1.45	1.43	1.42	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.28	1.27	1.26	1.24
28	1.38	1.46	1.45	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.34	1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.27	1.25	1.24
29	1.38	1.45	1.45	1.43	1.41	1.40	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.32	1.31	1.30	1.29	1.27	1.26	1.25	1.23
30	1.38	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.32	1.30	1.29	1.28	1.27	1.26	1.24	1.23
40	1.36	1.44	1.42	1.40	1.39	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.31	1.30	1.28	1.26	1.25	1.24	1.22	1.21	1.19
60	1.35	1.42	1.41	1.38	1.37	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.27	1.25	1.24	1.22	1.21	1.19	1.17	1.15
120	1.34	1.40	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.26	1.24	1.22	1.21	1.19	1.18	1.16	1.13	1.10
∞	1.32	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.29	1.28	1.27	1.25	1.24	1.22	1.19	1.18	1.16	1.14	1.12	1.08	1.00

Degrees of Freedom for the Denominator (ν_2)

^aFrom Degrees of Freedom

IV Percentage Points of the F Distribution (Continued)

F_{α, ν_1, ν_2}

$\nu_2 \backslash \nu_1$	Degrees of Freedom for the Numerator (ν_1)																∞		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40		60	120
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.10
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.80
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67	1.63
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.96	1.92	1.89	1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53	1.49
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.03	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17	1.00

Degrees of Freedom for the Denominator (ν_2)

IV Percentage Points of the F Distribution (Continued)

$F_{0.05, \nu_1, \nu_2}$

ν_2	Degrees of Freedom for the Numerator (ν_1)																	∞	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60		120
2	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
3	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
4	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
5	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
6	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
7	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
8	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
9	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
10	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
11	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
12	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
13	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
14	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
15	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
16	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
17	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
18	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
19	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
20	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
21	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
22	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
23	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
24	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
25	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
26	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
27	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
28	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
29	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
30	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
40	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
60	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
120	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
∞	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

Degrees of Freedom for the Denominator (ν_2)

IV Percentage Points of the *F* Distribution (Continued)

*F*_{0.025, *v*₁, *v*₂}

<i>v</i> ₂	Degrees of Freedom for the Numerator (<i>v</i> ₁)																		∞			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	100		1010	1014	1018
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6	976.7	984.9	993.1	997.2	1001	1006	1010	1014	1018			
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50			
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90			
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26			
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02			
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85			
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14			
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67			
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33			
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08			
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88			
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72			
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60			
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49			
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40			
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32			
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25			
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19			
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13			
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09			
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04			
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00			
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97			
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94			
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91			
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88			
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85			
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83			
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81			
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79			
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64			
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48			
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31			
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00			

Degrees of Freedom for the Denominator (*v*₂)

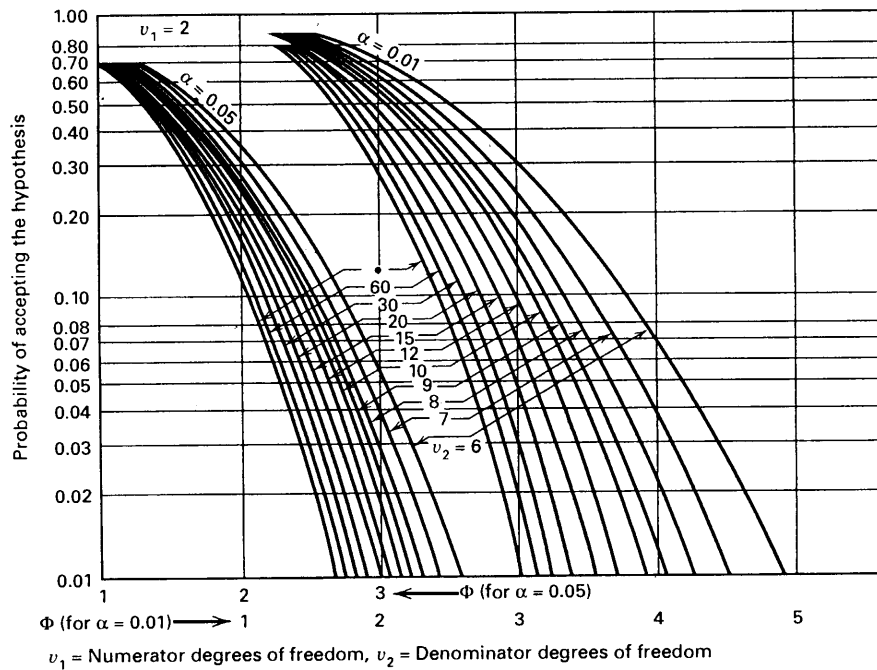
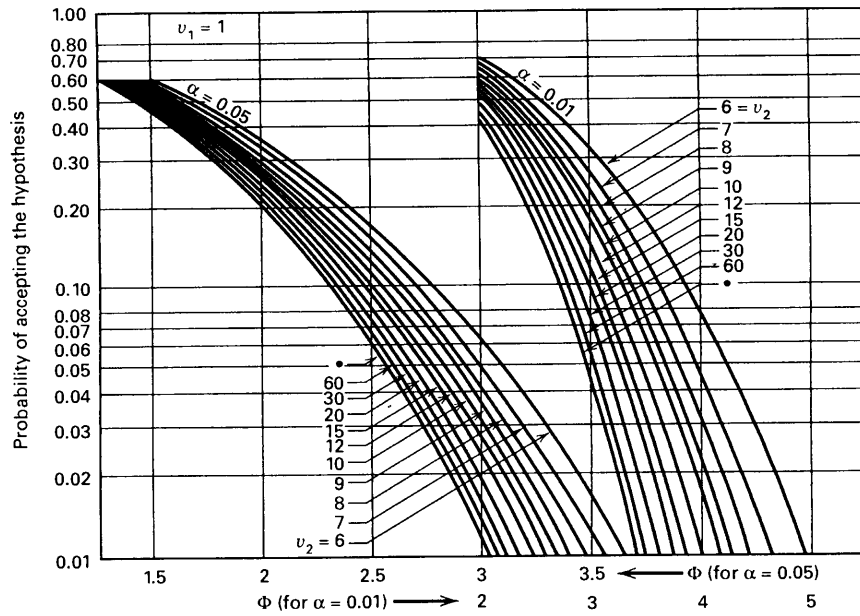
IV Percentage Points of the F Distribution (Continued)

$F_{0.01, \nu_1, \nu_2}$

ν_2	Degrees of Freedom for the Numerator (ν_1)																∞		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40		60	120
1	4052	4999.5	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87	26.69	26.00	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.34	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.55	1.40
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.19	2.03	1.87	1.79	1.70	1.60	1.50	1.39	1.25

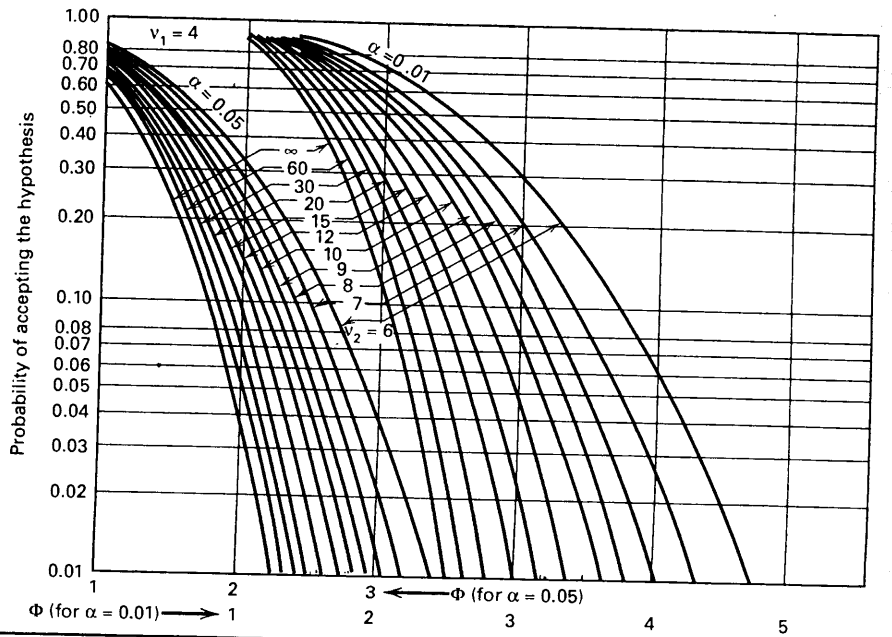
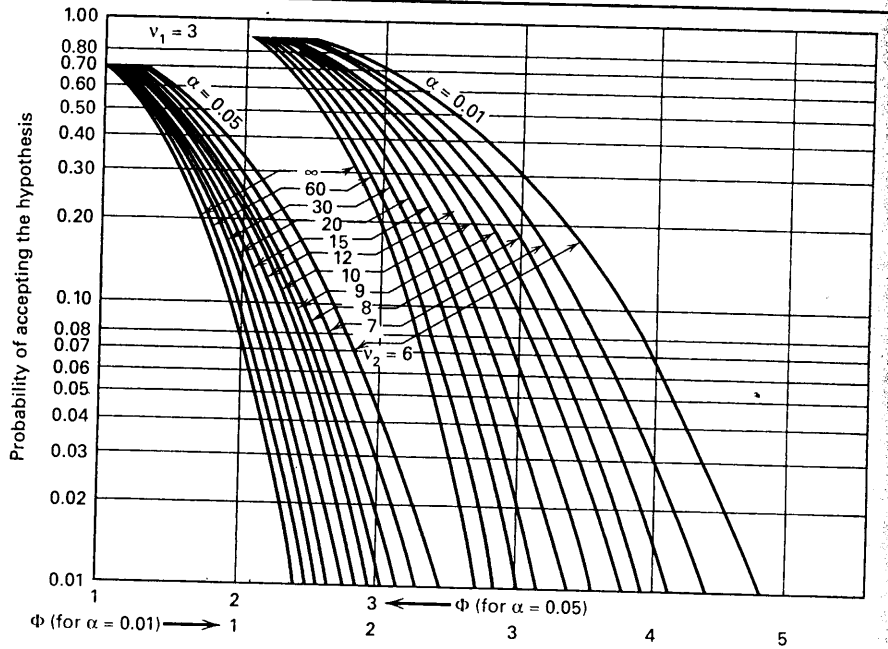
Degrees of Freedom for the Denominator (ν_2)

V Operating Characteristic Curves for the Fixed Effects Model Analysis of Variance^a



^aAdapted with permission from *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 2, by E. S. Pearson and H. O. Hartley, Cambridge University Press, Cambridge, 1972.

V Operating Characteristic Curves for the Fixed Effects Model Analysis of Variance (Continued)



V Operating Characteristic Curves for the Fixed Effects Model Analysis of Variance (Continued)

